SEGUNDA OLIMPIADA LATINOAMERICANA Y DEL CARIBE UNIVERSITARIA DE FÍSICA (OLUF)

11 de mayo de 2018

Sociedad Cubana de Física

DATOS PERSONALES:

Nombre: ____

Centro de Educación Superior: ____

País:____________________ **Carrera:** ______________________________ **Año:**_______________________

Teléfono: _____________________________ **C. Electrónico:**__________________________________

Carnet de Identidad:________________________________

FIRMA: ___________________________

PUNTUACIONES: 1:___ , 2:___ , 3:___ , 4:___ , 5:___ TOTAL:________

LAS SOLUCIONES:

- **Las soluciones a problemas diferentes deben escribirse en hojas separadas.**
- **Se permite el uso de calculadoras.**

PUNTUACIÓN:

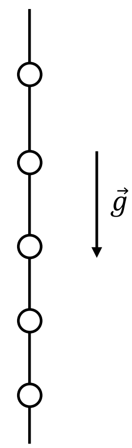
- **El valor de cada problema se encuentra escrito en el enunciado respectivo. Se darán puntos por soluciones parciales.**

DURACIÓN:

- **4½ horas.**

Problema 1: Dinámica de un ábaco vertical (20 puntos)

La figura muestra un sistema compuesto por cinco pequeñas cuentas elásticas idénticas, que se pueden mover por una varilla muy larga colocada verticalmente y apoyada en el suelo. La fricción entre las cuentas y la varilla puede ser despreciada y para todo el espacio que ocupa la varilla la aceleración de la gravedad puede considerarse constante e igual a $\boldsymbol{g}$. En el instante $\boldsymbol{t_0}$, a cada cuenta se le comunica una velocidad diferente que puede estar dirigida hacia arriba o hacia abajo.



a) Determine el máximo número posible de choques ente las cuentas.
b) Encuentre una relación entre las velocidades iniciales de las cuentas para que, desde un sistema inercial ligado al suelo, transcurrido cierto intervalo de tiempo $\boldsymbol{t}$, la energía cinética sumaria de las mismas alcance de nuevo el valor inicial. Encuentre una expresión para $\boldsymbol{t}$ en función de $\boldsymbol{g}$ y las velocidades iniciales de las cuentas.
c) Suponga ahora que las cuentas se encontraban inicialmente en posiciones equidistantes, a distancia $\boldsymbol{d}$ entre dos contiguas y estando la más baja a una altura $\boldsymbol{H}$ del suelo. Describa alguna combinación para el movimiento de las mismas, con la cual la llegada de todas al suelo sea simultánea al cabo de un tiempo $\boldsymbol{t'}$. Encuentre una expresión para $\boldsymbol{t'}$ en función de $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{g}$ y las velocidades iniciales de las cuentas.

Problema 2: La evolución de las especies: ¿viola el segundo principio de la Termodinámica? (20 puntos)

a) El ADN de una bacteria contiene unos 5×10^6 pares de bases, cada uno de los cuales puede ser AT, TA, GC o CG.* De todas las configuraciones posibles sólo unas 10^{13} corresponden a especies vivas. ¿Cuál es la variación de entropía necesaria para que de la mutación de una configuración cualquiera surja una especie viva?

b) Suponga que la evolución de las especies ocurre tan rápido que en 100 años cada una evoluciona hacia otra 1000 veces más organizada y, por tanto, 1000 veces más improbable. Teniendo en cuenta que sobre la Tierra existen unos 10^{32} organismos vivos, estime la variación de entropía del planeta producida cada segundo por la evolución.

c) La Tierra absorbe como promedio $P = 1.21 \times 10^{17}\ W$ de energía solar y la reemite casi completamente al espacio exterior, de modo que su temperatura media se mantiene aproximadamente en unos $288\ K$. La temperatura de la superficie del Sol es 5778 K y la del espacio exterior es la del fondo de radiación de microondas, unos 2,7 K. En el intercambio de energía en el sistema Sol – Tierra – Espacio Exterior ¿cuánto varía la entropía cada segundo?

d) A la luz de los resultados anteriores, ¿cree Ud. que exista alguna contradicción entre el origen de la vida, la evolución de las especies y el segundo principio de la Termodinámica? Explique.

* A=Adenina, C=Citosina, G= Guanina, T= Timina

Dato: Utilice para la constante de Boltzmann el valor $k \approx 1.38 \cdot 10^{-23}\ JK^{-1}$

Problema 3: Detectando el monopolo magnético (20 puntos)

Usualmente, las ecuaciones de Maxwell se formulan de la siguiente forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1) \qquad\qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \overrightarrow{J_e} \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e \qquad (3) \qquad\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (4)$$

donde $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \rho_e$ y $\overrightarrow{J_e}$ son el campo eléctrico, el campo magnético, la densidad de flujo eléctrico, la densidad de flujo magnético, la densidad de carga eléctrica, y la densidad de corriente eléctrica, respectivamente.

Algunos modelos teóricos sugieren la existencia de monopolos magnéticos (análogos a la carga eléctrica), y predicen que cada uno de ellos ha de tener una magnitud de $4 \times 10^{15}\ Tm^2$. De ser correcta la teoría, las ecuaciones de Maxwell pudieran “completarse” agregando adecuadamente los términos ρ_m y $\overrightarrow{J_m}$, que representarían la densidad de carga magnética y la densidad de corriente de carga magnética, respectivamente, asociadas a los monopolos magnéticos.

a) Escriba cómo quedarían las ecuaciones de Maxwell, suponiendo la existencia de monopolos magnéticos.

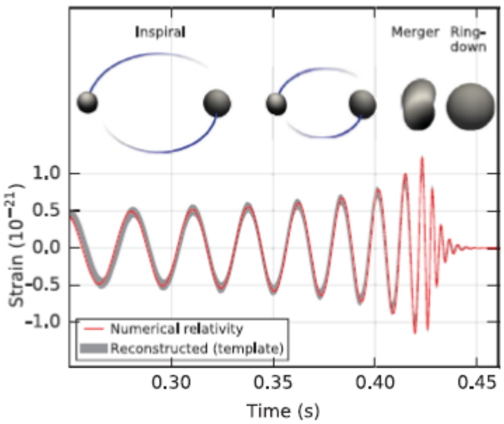
b) Aunque hasta hoy no se ha podido probar experimentalmente su existencia, desde el principio de la década de 1980 se han estado tratando de detectar los monopolos magnéticos utilizando un anillo superconductor situado en un ambiente apantallado, donde se minimiza el ruido magnético “convencional”. Utilice las ecuaciones de Maxwell por usted modificadas para demostrar que, midiendo el flujo magnético en el hueco del anillo superconductor, se puede detectar el eventual paso de un monopolo magnético a través del mismo. Suponga que dentro del material superconductor del cual está hecho el anillo, se cumple siempre la condición $\vec{E} = 0$, y que $\vec{B}$ es uniforme en el orificio del anillo.

c) Suponga que el anillo superconductor se ha conformado a partir de una lámina superconductora de alta temperatura crítica cuyo grosor es de 1 μm, de modo que el plano del orificio está en el plano de la lámina. ¿Cuál es, aproximadamente, el máximo radio interior que puede poseer el anillo si se pretende detectar un monopolo magnético con el dispositivo inmerso en un refrigerante a T ≈ 77 K, considerando solamente los efectos del ruido térmico? Suponga que $\vec{B}$ es uniforme dentro del orificio del anillo, y que es nulo dentro del material superconductor.

Sociedad Cubana de Física

Problema 4: Ondas gravitacionales.[1] (20 puntos)

En 1916 Albert Einstein predijo que las masas aceleradas emiten OG que se propagan con la misma rapidez (c) que la luz en el vacío y a su paso deforman el espacio, modificando las dimensiones de los cuerpos que lo ocupan. Estas ondas fueron detectadas por primera vez el 14 de septiembre de 2015 en un evento astrofísico identificado como GW150914 y permitieron observar, también por primera vez: i) agujeros negros de masa mayor que 30 veces la masa $M_{\odot}$ del Sol ii) un sistema de dos agujeros negros que giran alrededor de su centro de masas común iii) la evolución de ese sistema en espiral hasta la fusión de los dos agujeros negros. El premio Nobel de Física 2017 fue otorgado a R. Weiss, B. C. Barish y K. S. Thorne por sus decisivas contribuciones a la creación del detector LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Waves Observatory*) y a la observación de las OG.



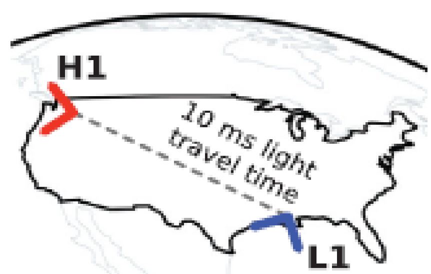


Fig. 1 Panel izquierdo. Representación de la evolución del sistema binario de agujeros negros observado y de la deformación relativa de una longitud durante el paso de la GW150914 por uno de los observatorios LIGO. Panel derecho. Localización de los detectores del experimento LIGO que detectaron la GW150914 en Livingston (L1) y Hanford (H1).

La evolución del sistema binario antes de su fusión puede describirse aproximadamente con la mecánica newtoniana.

a) Demuestre que si los agujeros negros se representan por dos masas puntuales m_1, m_2 situadas a la distancia d, que giran en órbitas circulares con velocidad angular ω respecto a su centro de masa, se cumple que:

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}$$

donde G es la constante de gravitación universal.

b) Demuestre que la energía mecánica del sistema binario cuando su centro de masas está en reposo se puede expresar como:

[1] Este problema está inspirado en los artículos: B.P. Abbott et al., *The basic physics of the binary black hole merger GW150914*, Ann. Phys. (Berlin) 529, No. 1-2, 1600209 (2017) y H Mathur, K Brown, A Lowenstein, *An analysis of the LIGO discovery based on Introductory Physics*, American Journal of Physics 85 (9), 676 (2016). Las figuras fueron tomadas de B. P. Abbott et al., PRL, 116, 061102 (2016).

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2d} = -\frac{G^{2/3}m_1m_2}{2(m_1+m_2)^{1/3}}\omega^{2/3}$$

c) Al disminuir la distancia entre los agujeros negros, su energía mecánica disminuye por la emisión de OG, cuya frecuencia $f = \omega/\pi$ aumenta con el tiempo. De acuerdo a la Teoría General de la Relatividad, la potencia emitida es proporcional al cuadrado del momento de inercia I y viene dada por:

$$P = \frac{32G}{5c^5}I^2\omega^6$$

La forma en que f evoluciona en el tiempo está relacionada con la denominada "masa de chirrido" (chirp mass): $M \equiv \frac{(m_1m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1+m_2)^{\frac{1}{5}}}$. Suponiendo que la potencia emitida en forma de OG es igual a la pérdida de energía mecánica del sistema, demuestre que la "masa de chirrido" está dada por:

$$M = \frac{c^3}{G}\left(\frac{5}{96}\pi^{-\frac{8}{3}}f^{-\frac{11}{3}}\frac{df}{dt}\right)^{\frac{3}{5}}$$

Las mediciones de f y su derivada temporal $\frac{df}{dt}$ en el evento GW150914 permitieron determinar M$\sim 30\,M_\odot$.

d) Asuma que los agujeros negros tienen masas iguales. Estime el valor de la masa de cada agujero negro, en términos de la masa solar $M_\odot$ y calcule su separación d_0 cuando la frecuencia de la OG alcanzó su valor máximo ($f_{max} = 150\,Hz$)

e) La mínima distancia a la que un objeto puede acercarse a un agujero negro, llamada radio de Schwarzschild, es aquella a la que ni siquiera la luz puede escapar de su atracción. Demuestre que la separación calculada en el inciso anterior es mayor que la mínima distancia a la que pueden acercarse dos agujeros negros antes de su fusión.

f) Calcule la energía emitida en forma de OG, durante la evolución del sistema binario, desde que los agujeros negros estaban separados por una distancia muy grande hasta que estuvieron a la distancia d_0. Exprese esa pérdida de energía en función de $M_\odot$.

g) ¿Cómo Ud. explica que la onda gravitacional GW150914 demoró aproximadamente 7 ms en llegar del observatorio LIGO en Livingston al de Hanford, si la distancia entre los dos observatorios es de $\sim 3000\,km$?

Para los cálculos use $G = 6.67\cdot 10^{-11}\,{m^3}/{s^2\cdot kg}$; $c = 2.99\cdot 10^8\,{m}/{s}$; $M_\odot = 2.00\,\cdot 10^{30}kg.$

Sociedad Cubana de Física

Problema 5: Masa de los protones y neutrones. (20 puntos)

Los protones y neutrones (nucleones) portan la mayor parte de la masa de la materia usual en la Tierra y en todos los planetas conocidos. Los nucleones se consideran formados por tres *quarks* de dos tipos *Up* (*u)* y *Down* (*d)*. Estos son, de los seis tipos establecidos en la teoría actual de estas partículas, los que menos masa poseen. En correspondencia con este hecho, asuma que dichos *quarks* pueden tratarse como fotones, es decir, como partículas con masa nula que poseen una energía $\epsilon = \hbar\omega$ y un momento lineal $\vec{p} = \frac{\epsilon}{c^2}\vec{c}$ donde $\vec{c}$ es un vector en la dirección del movimiento y módulo c igual a la velocidad de la luz en el vacío. Se conoce que entre dos *quarks* cualesquiera existe una energía potencial (potencial de confinamiento) que crece linealmente con la distancia entre ellos, $(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2})$, según la fórmula $V(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}) = k|\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}|$ donde k es una constante. De esa energía potencial se dice que "confina" a los *quarks* impidiéndoles que aparezcan como partículas libres. Asuma además que los movimientos de los tres *quarks* (digamos que en un protón) se realizan en un plano, que sus energías son iguales y que las distancias entre ellos coinciden y no varían en el tiempo. Considere además una condición de cuantización cuasi-clásica de Bohr para los *quarks*, de tal forma que entre el perímetro L de sus órbitas y el módulo de su momento lineal p, se cumple la relación $pL = 2\pi n\hbar$, con $n = 1, 2, 3$ ...

a) Evalúe aproximadamente la masa del protón, medida en GeV ($1\,GeV = 10^9\,eV$), utilizando la información antes presentada y el valor obtenido experimentalmente para el radio del protón de $0.82\,Fermi$ ($1\,Fermi = 10^{-15}\,m$) y compárela con su valor experimental ($0.938\,GeV$).

b) Evalúe la constante k del potencial que confina a los *quarks* en unidades de $GeV/Fermi$.

c) Usando el valor de k obtenido, calcule la masa de un mesón (constituido por dos *quarks*) bajo las mismas suposiciones empleadas en el caso del protón.

d) Dados los valores que se estiman para la masa de los *quarks* m_u y m_d, de unos pocos MeV, diga si la aproximación utilizada al suponer que los *quarks* eran no masivos resulta aceptable y evalúe la velocidad a la que se mueve un quark con una masa de $5\,MeV$ que tenga la energía calculada en la aproximación de masa nula utilizada.

Datos:
$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}\,Js$ $\quad c = 2.99 \cdot 10^8$ m/s $\quad 1\,GeV \equiv 1.602 \times 10^{-10}\,J$
$1m \equiv 10^{15} Fermi$ $\quad m_d = 2.5 - 5\,MeV$ $\quad m_u = 1.5 - 3\,MeV$ $\quad m_\pi = 0.136\,GeV$

Nota: El término masa en este problema corresponde con lo que en algunos textos se ha denominado masa en reposo. Asimismo, se supone que esta masa puede ser expresada en unidades de energía utilizando la relación de Einstein entre masa y energía.